## Lektion 4: Massenbestimmung im Planetensystem

Nachdem wir die Entfernungen der Planeten kennen, brauchen wir als nächste Größe ihre Masse. Als Ausgangspunkt benützt man das Newtonsche Gravitationsgesetz.

$$F\_{Grav}=G∙\frac{M∙m}{r^{2}}$$

Dabei ist M die „anziehende“ Masse und m die Masse, die angezogen wird. Die Größe r ist der Abstand zwischen den beiden Massenmittelpunkten.

Nach dieser Erklärung kann man die Kursteilnehmer „raten“ lassen, wie man damit die Masse der Erde bestimmen kann? Vielleicht hat ein schlauer Kursteilnehmer die richtige Idee.

Wenden wir das Gravitationsgesetz auf die Erde an, so gilt an der Erdoberfläche gilt für die Gravitationskraft der Erde auf eine Masse m: $F\_{Grav}=G∙\frac{M\_{Erde}∙m}{r\_{E}^{2}}$

Aus dem Physikunterricht wissen die Kursteilnehmer, dass sich die Gewichtskraft, die Kraft, mit der die Erde einen Körper anzieht, also die Gravitationskraft der Erde an der Erdoberfläche, aus

$$F=m∙g$$

berechnen lässt. Wobei der Ortsfaktor g im Mittel auf der Erde gleich $9,81 \frac{m}{s²}$ ist. Setzen wir die Ausdrücke für beide Kräfte gleich:

$$F\_{Grav}=G∙\frac{M\_{Erde}∙m}{r\_{E}^{2}}=m∙g=F$$

so folgt:

$$g= G∙\frac{M\_{Erde}}{r\_{E}^{2}}$$

Aufgelöst nach $M\_{Erde}$ gilt:

$$M\_{Erde}=\frac{g∙r\_{E}^{2}}{G}$$

Mit dem mittleren Erdradius von 6370km und $G=6,673∙10^{-11}\frac{m³}{kg∙s²}$ folgt für die Masse der Erde:

$$M\_{Erde}=\frac{9,81\frac{m}{s²}∙\left(6370∙10^{3}m\right)^{2}}{6,673∙10^{-11}\frac{m³}{kg∙s²}}=5,965∙10^{24}kg$$

Im nächsten Schritt wollen wir die Masse der Sonne bestimmen. Wie können wir das Gravitationsgesetz dazu einsetzen? Gehen wir davon aus, was ja keine schlechte Näherung ist, dass die Erde eine Kreisbahn um die Sonne beschreibt.

$$F\_{Grav}$$

$$F\_{Zentrifugal}$$

Abbildung 30 Kräfte auf einer Kreisbahn, eigenes Bild

Wie wirkt die Gravitationskraft der Sonne? (immer zur Sonne hin)

Warum ist die Erde nicht schon vor langer Zeit in die Sonne gestürzt? (durch die Bewegung der Erde auf einer Kreisbahn entsteht eine „Zentrifugalkraft“ nach außen)

Wie groß ist die „Zentrifugalkraft“? (genau so groß wie die Gravitationskraft)

Warum? Was geschieht, wenn die „Zentrifugalkraft“ größer ist als die Gravitationskraft? (Erde bewegt sich von der Sonne weg)

Ich verwende hier absichtlich den Begriff „Zentrifugalkraft“ statt der Argumentation über die Zentripetalkraft, da viele Kursteilnehmer aus der Mittelstufe den Begriff der Zentripetalkraft nicht kennen. Aber sie haben als Mitfahrer Erfahrungen bei einer scharfen Kurvenfahrt im Auto, bei der sie nach außen an die Tür gedrückt werden, oder auf einem Karussell, wo sie diese Kraft ebenfalls „spüren“ oder gespürt haben. Die Formel für die „Zentrifugalkraft“ (Zentripetalkraft) lautet:

$$F\_{Z}=m∙ω²∙r$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit und r der Radius der Kreisbahn. Da die Winkelgeschwindigkeit für alle Mitfahrer gleich groß ist, nimmt die Zentrifugalkraft mit der Masse und vor allem dem Radius zu. Je weiter außen man sich befindet, umso größer ist bei gleicher Winkelgeschwindigkeit die Zentrifugalkraft.

Formen wir etwas um:

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $ω=\frac{2∙π}{T}$

Dabei ist $2∙π≜360°$ der Winkel eines Vollkreises und T die zum überstreichen des Vollkreises notwendige Zeit, die Periode.

Eingesetzt in $F\_{Z}$ folgt: $$F\_{Z}=m∙\left(\frac{2∙π}{T}\right)^{2}∙r=m∙\frac{2∙π∙r}{T}∙\frac{2∙π}{T}∙\frac{r}{r}=m∙\frac{2∙π∙r}{T}∙\frac{2∙π∙r}{T}∙\frac{1}{r}=\frac{m∙v^{2}}{r}$$

Ein Hinweis auf das geschickte Erweitern von Brüchen, das zur „neuen“ Größe v, der Geschwindigkeit, führt, ist bei der Herleitung sicher nicht verkehrt. Natürlich könnte man die Gravitationskraft und die „Zentrifugalkraft“ gleichsetzen, ohne die „Bahngeschwindigkeit“ der Erde einzuführen, aber astronomisch gesehen ist die Bahngeschwindigkeit der Erde eine Größe, die man kennen muss (zumindest sollte man sie kennen) und die deshalb wenigstens einmal berechnet werden sollte. Damit haben wir alles Wesentliche bereitgestellt, um die Masse der Sonne zu berechnen

$$F\_{Grav}=G∙\frac{M\_{⊙}∙M\_{Erde}}{R\_{E}^{2}}=\frac{M\_{Erde}∙v\_{Erde}^{2}}{R\_{E}}$$

Kürzen und auflösen nach $M\_{⊙}$ (für Kursteilnehmer aus der Mittelstufe eine gute Übung in Algebra) liefert:

$$M\_{⊙}=\frac{v\_{Erde}^{2}}{R\_{E}}∙\frac{R\_{E}^{2}}{G}=\frac{v\_{Erde}^{2}∙R\_{E}}{G}$$

Berechnen wir die Bahngeschwindigkeit der Erde:

$$v\_{Erde}=\frac{2∙π∙R\_{E}}{T}=\frac{2∙π∙149,6∙10^{6}km}{365,25∙86400s}≅29,8\frac{km}{s}$$

Für die Masse der Sonne ergibt sich damit:

$$M\_{⊙}=\frac{v\_{Erde}^{2}∙R\_{E}}{G}=\frac{\left(29,8∙10^{3}\frac{m}{s}\right)^{2}∙149,6∙10^{9}m}{6,673∙10^{-11}\frac{m³}{kg∙s²}}≅1,99∙10^{30}kg$$

Nach Erde und Sonne bleiben uns noch die Massen der anderen Planeten. Wie können wir die Massen der anderen Planeten berechnen?

Der Versuch einfach die Gravitationskraft der Sonne gleich der Zentrifugalkraft des Planeten zu setzen, scheitert daran, dass sich, wie die folgende Gleichung zeigt, die Planetenmasse herauskürzt.

$$F\_{Grav}=G∙\frac{M\_{⊙}∙M\_{P}}{R\_{P}^{2}}=\frac{M\_{p}∙v\_{p}^{2}}{R\_{P}}$$

Wir brauchen also einen anderen Ansatz. Dazu müssen wir unsere Kenntnisse über die Bewegung von Sonne und Planet etwas verbessern. Um damit die Planetenmasse $m\_{P}$ bestimmen zu können, müssen wir unsere Vorstellung von den Bewegungen im Sonnensystem noch etwas verbessern. Ein Planet bewegt sich nicht um die Sonne, sondern die Sonne und der Planet bewegen sich um einen gemeinsamen Drehpunkt, den Schwerpunkt.

Abbildung 31 Beschleunigung im rotierenden System, eigenes Bild

S

$$r\_{1}$$

$$r\_{2}$$

P

x

DP

$$a\_{P}$$

$$a\_{S}$$

Etwa wie in folgender Skizze, die die Verhältnisse etwas übertrieben darstellt.

Die Gravitationskraft der Sonne verursacht eine Gravitationsbeschleunigung des Planeten: $F\_{G}=G∙\frac{M\_{S}∙m\_{P}}{r\_{P}²}=m\_{P}∙a\_{S}$

$$a\_{S}=\frac{G∙M\_{S}}{r\_{P}²}$$

Dabei gilt für den Abstand der Planeten $r\_{P}$ bzgl. des Schwerpunkts:

$$r\_{1}+r\_{2}=r\_{P}$$

Außerdem müssen wir uns klar machen, dass nicht nur die Sonne den Planeten, sondern auch der Planet die Sonne anzieht, d. h. die Sonne erzeugt eine Gravitationsbeschleunig $a\_{S}$ und der Planet erzeugt eine Gravitationsbeschleunigung $a\_{P}$.

Für die Gravitationsbeschleunigungen gilt:

$$a\_{S}=\frac{G∙M\_{S}}{r\_{P}^{2}}$$

und für die Beschleunigung der Sonne durch den Planeten: $a\_{P}=\frac{G∙M\_{P}}{r\_{P}^{2}}$

Am Drehpunkt gilt, da die Beschleunigungen gerichtete Größen sind und sich wie Kräfte addieren:

$$\left|\vec{a\_{ges}}\right|=\left|\vec{a\_{S}}\right|+\left|\vec{a\_{P}}\right|=\frac{G∙M\_{S}}{r\_{P}^{2}}+\frac{G∙M\_{P}}{r\_{P}^{2}}=\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P}\right)}{r\_{P}^{2}}$$

Da die Gravitationskraft auf den Planeten gleich der Zentrifugalkraft sein muss, muss auch gelten:

$$a\_{ges}=a\_{Zges}$$

Für die Zentrifugalbeschleunigungen gilt allgemein: $$F\_{Z}=m\_{P}∙ω^{2}∙r=m\_{P}∙a\_{Z}$$

$$a\_{Z}=ω^{2}∙r=\left(\frac{2∙π}{T}\right)^{2}∙r=\frac{4∙π²}{T²}∙r$$

Erweitern wir jetzt mit $r²$ , so erhalten wir einen Zusammenhang zwischen der Zentrifugalbeschleunigung und dem 3. Keplerschen Gesetz.

$$a\_{Z}=\frac{4∙π²}{T²}∙r∙\frac{r²}{r²}=\frac{4∙π²}{r²}∙\frac{r³}{T²}$$

Bzgl. des Drehpunktes gilt für den Planeten:

$$a\_{ZP}=\frac{4∙π²}{r\_{2}²}∙\frac{r\_{2}³}{T²}$$

und für die Sonne:

$$a\_{ZS}=\frac{4∙π²}{r\_{1}²}∙\frac{r\_{1}³}{T²}$$

$$a\_{Zges}=a\_{ZP}+a\_{ZS}=\frac{4∙π²}{r\_{2}²}∙\frac{r\_{2}^{3}}{T^{2}}+\frac{4∙π^{2}}{r\_{1}^{2}}∙\frac{r\_{1}^{3}}{T^{2}}=\frac{4∙π^{2}}{T^{2}}∙r\_{2}+\frac{4∙π^{2}}{T^{2}}∙r\_{1}=\frac{4∙π^{2}}{T^{2}}∙\left(r\_{1}+r\_{2}\right)$$

$$a\_{Zges}=\frac{4∙π^{2}}{T^{2}}∙r\_{P}=\frac{4∙π^{2}}{r\_{P}^{2}}∙\frac{r\_{P}^{3}}{T²}$$

$$\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P}\right)}{r\_{P}^{2}}=\frac{4∙π²}{r\_{P}²}∙\frac{r\_{P}³}{T²}$$

und damit erhalten wir für die Konstante im 3. Keplerschen Gesetz:

$$\frac{r\_{P}³}{T²}=\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P}\right)}{4∙π²}$$

Für zwei verschiedene Planeten 1 und 2 im Sonnensystem gilt:

$$\frac{r\_{P1}³}{T\_{1}²}=\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P1}\right)}{4∙π²}$$

$$\frac{r\_{P2}³}{T\_{2}²}=\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)}{4∙π²}$$

Bilden wir den Quotienten aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\frac{r\_{P1}³}{T\_{1}²}}{\frac{r\_{P2}³}{T\_{2}²}}=\frac{\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P1}\right)}{4∙π²}}{\frac{G∙\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)}{4∙π²}}$$

und formen etwas um:

$$\frac{\frac{r\_{P1}³}{T\_{1}²}}{\frac{r\_{P2}³}{T\_{2}²}}=\frac{\left(M\_{S}+M\_{P1}\right)}{\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)}$$

$$\frac{r\_{P1}^{3}}{r\_{P2}^{3}}=\frac{T\_{P1}^{2}∙\left(M\_{S}+M\_{P1}\right)}{T\_{P2}^{2}∙\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)}$$

Da wir die Masse der Sonne und eines Planeten, nämlich der Erde, bestimmt haben, können wir die Massen aller anderen Planeten aus ihren Bahnradien (den großen Halbachsen der Bahnellipsen) und den Umlaufzeiten bestimmen. Setzen wir P2 gleich der Erde so gilt:

$$\frac{T\_{P2}^{2}∙r\_{P1}^{3}}{T\_{P1}^{2}∙r\_{P2}^{3}}=\frac{\left(M\_{S}+M\_{P1}\right)}{\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)}$$

$$M\_{S}+M\_{P1}=\frac{T\_{P2}^{2}∙r\_{P1}^{3}}{T\_{P1}^{2}∙r\_{P2}^{3}}∙\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)$$

$$M\_{P1}=\frac{T\_{P2}^{2}∙r\_{P1}^{3}}{T\_{P1}^{2}∙r\_{P2}^{3}}∙\left(M\_{S}+M\_{P2}\right)-M\_{S}$$

Aus unseren Daten für das Sonnensystem erhalten wir mit einer Exceltabelle berechnet:



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Msonne | 1,99E+30 | kg |  | Merde | 5,97E+24 | kg |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| Planet | Merkur | Venus | Mars | Jupiter | Saturn | Uranus | Neptun |
| große HA/AE | 0,38709888 | 0,72333193 | 1,5236621 | 5,2033623 | 9,537069 | 19,191261 | 30,06896 |
| Umlaufzeit/a | 0,2408467 | 0,61519726 | 1,8808476 | 11,862615 | 29,447498 | 84,016846 | 164,79132 |
| Masse/kg ber. | -6,57E+25 | -6,67E+25 | -1,83E+26 | 2,26E+27 | 6,84E+26 | 2,65E+27 | 2,24E+27 |
| Masse/kg real | 3,30E+23 | 4,87E+24 | 6,42E+23 | 1,90E+27 | 5,68E+26 | 8,68E+25 | 1,02E+26 |

Man sieht sofort (durch Vergleich mit Abbildung 29), dass die Formel für die inneren Planeten überhaupt nicht und für die äußeren Planeten nur recht schlecht funktioniert.

Woran liegt das? (die Masse der Sonne ist zu groß im Vergleich zur Erdmasse und nicht genau genug bekannt)

Wie kann man die Masse besser bestimmen?

Schauen wir uns dazu an, was wir sehen, wenn wir z. B. Jupiter lange beobachten (jupitermonde.avi). Wir sehen Jupiter und 5 seiner Monde in der Animation – vom Innersten zum Äußersten: Amalthea (nur als Schatten erkennbar), Io, Europa, Ganymed und Kallisto.

Was können wir aus solchen Beobachtungen bestimmen? (Umlaufzeit und Radius der Umlaufbahn, da wir ja den Abstand des Planeten Jupiter von der Sonne kennen)

Welchen Zeitpunkt wählt man für die Messung zweckmäßigerweise? (Opposition)

Warum wählt man am besten die Opposition? Sonne, Erde und Jupiter liegen auf einer Linie und der Abstand Erde-Jupiter ist problemlos auszurechnen

Was kann bzw. muss man messen? (Umlaufzeit und maximalen Winkelabstand α zum Jupiter)

Abbildung 32 Bestimmung der Jupitermasse, eigenes BIld

Schauen wir uns die Verhältnisse in einer Skizze an!

Aus der Entfernung Erde-Sonne und Jupiter-Sonne lässt sich bei Opposition der Abstand Erde-Jupiter berechnen:

$$r\_{E-J}=r\_{J-S}-r\_{E-S}$$

Und damit der Abstand des Jupitermondes:

$$r\_{Mond}= r\_{E-J}∙\tan(α)$$

Das Gravitationsgesetz auf das Jupitersystem angewendet ergibt den Standardansatz:

$$F\_{Grav}=F\_{Z}$$

$$G∙\frac{M\_{J}∙M\_{Mond}}{r\_{Mond}^{2}}=M\_{Mond}∙\frac{v\_{Mond}²}{r\_{Mond}}$$

Auflösen nach $M\_{J}$:

$$M\_{J}=\frac{v\_{Mond}²}{G∙r\_{Mond}}∙r\_{Mond}^{2}=\frac{4∙π²∙r\_{Mond}³}{G∙T\_{Mond}²}$$

Aus den Umlaufzeiten und den großen Halbachsen der 4 großen Jupitermonde ergibt sich:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | IO | Europa | Ganymed | Kallisto |
| Radius/m | 4,22E+08 | 6,71E+08 | 1,07E+09 | 1,88E+09 |
| Umlaufzeit/s | 152300,045 | 304600,003 | 618242,803 | 1442054,02 |
| Jupitermasse | 1,91E+27 | 1,93E+27 | 1,90E+27 | 1,90E+27 |
|  |  |  |  |  |
|  | Mittelwert: | 1,91E+27 | kg |  |
|  |  |  |  |  |

Was ziemlich genau mit dem Tabellenwert der Jupitermasse von 1,899 · 1027 kg übereinstimmt. Der Fehler beträgt nur 0,55%. Für unsere astronomischen Berechnungen ist das mehr als gut.

Auf diese Art lässt sich für jeden Planeten im Sonnensystem der Monde besitzt, also neben Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto, die Masse berechnen. Die Massen von Merkur und Venus konnten, bis sie von Forschungssonden erreicht wurden, nur durch aufwändige Störungsrechnung ermittelt werden. Dabei wird der Einfluss von Merkur und Venus auf die Bahnen der nächstgelegenen Planeten berechnet und aus den gemessenen Bahnabweichungen, die Masse von Venus und Merkur abgeschätzt. Nachdem wir gelernt haben, wie man die wesentlichen Daten der Planeten bestimmt, wollen wir uns nun die Körper des Sonnensystems einzeln vornehmen. Starten wir mit dem wichtigsten Mitglied des Sonnensystems, der Sonne.